



**Zadania na XXI Podkarpacki Konkurs Matematyczny
im. Franciszka Lejona
Poziom III**

(klasy trzecie liceum i technikum po szkole podstawowej)

Etap powiatowy

5 marca 2022 r. godzina 10.00

(150 minut)

1. Wykaż, że jeżeli liczba naturalna n jest względnie pierwsza z 15, to 60 dzieli $n^4 - 5n^2 + 4$.
Uwaga: Dwie liczby naturalne nazywamy względnie pierwszymi wtw, gdy jedynym ich wspólnym dzielnikiem jest 1.
2. Uprość wyrażenie (do postaci nieskracalnej) :
$$\frac{x^2 - y^2}{(2\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{xy} + 2\sqrt[3]{y^2}) \cdot (2\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{xy} + 2\sqrt[3]{y^2})} \cdot \frac{\sqrt{16xy}}{\sqrt[3]{x^5y^3} - \sqrt[3]{x^3y^5}}$$
, a następnie wykaż, że wartość wyrażenia dla $x = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$ i $y = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$ jest wymierna.
3. Na trójkącie równobocznym ABC opisano okrąg. Na łuku BC tego okręgu obrano dowolny punkt P. Wykaż, że : $|PA| = |PB| + |PC|$
4. Bok kwadratu ABCD ma długość m . Na boku BC i CD wybrano odpowiednio punkty E i F tak, aby $|CE| = 2|FD|$. Oblicz długość $|DF|$, dla której pole trójkąta AEF jest najmniejsze.
5. Znajdź wszystkie pary liczb rzeczywistych (x, y) spełniające nierówność: $(x^3 + y^2 + 2)^2 \leq 7y^2 + 2x^3(y^2 + y + 2)$

Powodzenia!